УДК 539.12

КВАЗИДЕТЕРМИНАНТЫ, НЕКОММУТАТИВНЫЕ ДЕТЕРМИНАНТЫ И НЕОБРАТИМЫЕ СУПЕРМАТРИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ

С.А. Duplий, О.И. Котульская
Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. Internet: http://www.math.uni-mannheim.de/˜duplij
Поступила в редакцию 25 марта 2003 г.

В работе представлена общая теория квазидетерминантов. Дано понятие квазидетерминанта для матриц над свободным кососимметричным полем, описаны его основные свойства. Рассмотрены некоммутативные детерминанты как произведения квазиминоров. Приведены примеры наиболее известных некоммутативных детерминантов. В связи с появлением многочисленных приложений необратимых матриц с некоммутативными элементами, вводится обобщение квазидетерминанта на необратимый случай.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: детерминант, кососимметричное поле, квазидетерминант, необратимость, полугруппа, обобщенное обратное, регулярность.

Понятие детерминанта играет ключевую роль в теории представлений групп матрицами [1, 2], а, следовательно, во многих расчетах, связанных с физикой высоких энергий и теорией элементарных частиц [3]. С появлением суперсимметричных теорий [4, 5, 6, 7, 8] и квантовых групп [9, 10, 11, 12] возникла насущная необходимость рассматривать матрицы, содержащие наряду с обычными числовыми элементами, также и антикоммутирующие [13, 14], и вообще некоммутативные элементы [15, 16]. Поэтому рассмотрение детерминантов (и других различных симметричных функций) от таких матриц является важным обобщением понятия детерминанта. С появлением многочисленных приложений необратимых матриц с некоммутативными элементами [17, 18, 19] возникла необходимость определить также аналоги детерминантов и для необратимых случаев [20, 21].

Впервые попытка определить детерминант с некоммутативными элементами была сделана Кэли еще более 150 лет назад [22], и на протяжении многих лет наиболее популярными примерами некоммутативных объектов были кватернионы и блок-матрицы, для которых и были определены различные некоммутативные детерминанты [23, 24].

Наиболее известным и широко используемым является детерминант Дьедонне [25, 26], определенный над алгеброй с делением R , так что, рассматривались детерминанты со значениями в $R^*/[R^*, R^*]$, где R^* является полугруппой обратимых элементов в R [27].

Обощение коммутативного детерминанта для матриц над суперкоммутативными алгебрами играет важнейшую роль в современных суперсимметричных теориях [14, 28, 29].

Другие известные примеры некоммутативных детерминантов были построены для различных частных случаев: квантовый детерминант [30], детерминант Капелли [31], детерминант Картье-Фоата [32] и др.

Понятие квазидетерминанта для матриц над свободным кососимметричным полем было введено в [33, 34]. Квазидетерминант определяется как наиболее некоммутативный случай, а именно, для матриц над свободным кососимметричным полем [35]. Квазидетерминант играет в некоммутативной алгебре ту же роль, что и детерминант в коммутативной, являясь в действительности отношением детерминанта $n\times n$-матрицы к детерминанту $(n-1)\times(n-1)$-подматрицы [36]. Квазидетерминант эффективно используется во многих областях, включающих некоммутативные симметричные функции, некоммутативные интегральные системы, квантовые алгебры [33, 36, 37].

КОСОСИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ СВОБОДНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Свободное кососимметричное поле является естественной структурой для работы с некоммутативными переменными [35]. Здесь будет рассмотрено кососимметричное поле как алгебра с делением над полем с характеристикой 0, но все может быть обобщено для поля с характеристикой p [36]. Пусть дано множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, обозначим $\mathcal{F}(X)$ алгебру, порожденную элементами из X над $\mathbb{Q}$, используя операции сложения, вычитания, умножения и нахождения обратной. Отношения еще не были установлены, так что, например, $(x - x)^{-1}$ существует. Алгебра $\mathcal{F}(X)$ называется алгеброй рациональных формул на X. Пусть R кольцо с единицей. Любое отображение $\alpha : X \to R$ определяет частичное отображение $\overline{\alpha}$ из $\mathcal{F}(X)$ в R по следующим правилам:

1) $\overline{\alpha}(m) = m,\ m \in \mathbb{Z},$

2) $\overline{\alpha}(x_i) = \alpha(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$

3) если $a = -b$, или $b + c$, или bc и $\overline{\alpha}(b), \overline{\alpha}(c)$ определены, тогда $\overline{\alpha}(a) = -\overline{\alpha}(b)$, или $\overline{\alpha}(b + c)$, или $\overline{\alpha}(b) \cdot \overline{\alpha}(c)$,

4) если $a = b^{-1}$ и $\overline{\alpha}(b)$ определена и обратима в R, тогда $\overline{\alpha}(a) = (\overline{\alpha}(b))^{-1}$.

Если $\overline{\alpha}(a)$ определено для $a \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ говорят, что α может быть вычислено на a. Теперь пусть $\alpha : X \to D$ отображение на кососимметричное поле D, тогда $\overline{\alpha}(a)$ неопределено, если a имеет b^{-1} такое, что $\overline{\alpha}(b) = 0$. Для каждого $\alpha : X \to D$ может быть рассмотрено подмножество $E(\alpha)$ из $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, область из $\overline{\alpha}$, состоящая из формул, на которых α может быть вычислено. Подобным образом каждому $a \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ можна поставить в соответсвие его область dom a, подмножество D^n состоит из точек $(\alpha(x_i), i = 1, \ldots, n)$ таких, что $a \in E(\alpha)$ определено; a называется невырожденным, если dom $a \neq \emptyset$. Можно показать, что если D кососимметричное поле, которое является алгеброй над неконечным полем k и a, и b невырождены, тогда dom $a \cap$ dom $b \neq \emptyset$. Пусть даны $a, b \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, тогда запишем $a \sim b$, если a, b невырождены и a, b имеют одинаковые значения в каждой точке dom $a \cap$ dom b. Это отношение эквивалентности, и классы эквивалентности называются рациональными функциями от $x_1, \ldots, x_n$. При этом:

i) Если D косимметричное поле с центром k характеристики 0. Тогда эквивалентные классы рациональных формул с переменными $x_1, \ldots, x_n$ образуют кососимметричное поле $F_D(X)$.

ii) Если D имеет бесконечную размерность над k,тогда $F_D(X)$ не зависит от кососимметричного поля D.

Исходя из предположений **i)** и **ii)**, отожествим все $F_D(X)$ и будем использовать обозначение $F(X)$. Для примера, если $X = \{x\}$ тогда $F(X) = \mathbb{Q}(x)$. Кососимметричное поле $F(X)$ называется свободным кососимметричным полем, порожденным X. Кон показал, что свободное кососимметричное поле является универсальным в следующем смысле. Рассмотрим алгебру $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ некоммутативных полиномов над коммутативным полем k. Алгебра $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ естественным образом вложена в алгебру $F(X)$. Универсальность означает, что если D является произвольным кольцом с делением и $\alpha : k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \to D$ есть гомоморфизм, тогда существует подкольцо R из $F(X)$ содержащее $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ и расширение α на гомоморфизм $\beta : R \to D$ такое, что, если $a \in R$ и $\beta(a) \neq 0$,тогда $a^{-1} \in R$. Высотой инверсии называется максимальное число вложенных инверсий, а высотой инверсии элемента кососимметричного поля $F(X)$ является наименьшей высотой инверсии этих рациональных выражений [35, 36].

Пример. Высота инверсии полинома от $x_1, \ldots, x_n$ равна нулю. Высота инверсии отношения двух полиномов PQ^{-1} равна 0, если P делится на Q и 1 в противном случае. Высота инверсии рацинальных выражений $r_1 = (1 - x)^{-1} + (1 - x^{-1})^{-1}$ и $r_2 = x^{-1} + x^{-1}(z^{-1}y^{-1} - x^{-1})^{-1}x^{-1}$ равна 2. Однако, $r_1 = 1$ и $r_2 = (x - yz)^{-1}$ в свободном кососимметричном поле, порожденном x, y и z. Таким образом высота инверсии r_1 и r_2 как рациональных функций равна 0 и 1 соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАЗИДЕТЕРМИНАНТА

Пусть $A = (a_{ij})$, $i \in I$, $j \in J$ матрица с элементами из кольца R,где I, J — конечные множества. Обозначим за A^{ij} подматрицу, полученную из A удалением i-ого ряда и j-ого столбика, за r_i^j матрицу-строку, получен из i-ого ряда A удалением элемента a_{ij}, за c_j^i матрицу-столбец, полученную из j-ого столбца A удалением элемента a_{ij}. Тогда квазидетерминант $|A|_{ij}^Q$ определяется формулой [33, 36]

$$|A|_{ij}^Q = a_{ij} - r_i^j (A^{ij})^{-1} c_j^i,$$

если подматрица A^{ij} обратима в кольце R. Иногда удобно принять более явное понятие ячейки элемента a_{ij}, когда для $A = (a_{pq})$, $p, q = 1, \ldots, n$, имеем

$$|A|_{ij}^Q = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & & \ldots & \\ a_{i1} & \ldots & \boxed{a_{ij}} & \ldots & a_{in} \\ & \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и полагаем $|A|_{ij}^Q = a_{ij}$ если $I = \{i\}$, $J = \{j\}$. Это определение не требует, чтобы I и J были упорядоченными, или биективного соответствия между I и J. Если все квазидетерминанты $|A^{ij}|_{pq}^Q$ для $p \in I \setminus \{i\}, q \in J \setminus \{j\}$ определены и обратимы, тогда [36]

$$|A|_{ij} = a_{ij} - \sum_{p,q} a_{iq} \left(|A^{ij}|_{pq}^Q\right)^{-1} a_{pj},$$

где сумма берется по всем $p \in I \setminus \{i\}, q \in J \setminus \{j\}$.

Если A есть $n \times n$-матрица, общего вида (в смысле, что все квадратные подматрицы A обратимы), тогда существует n^2 квазидетерминантов A. Однако, матрица необщего вида может иметь k квазидетерминантов, где $0 \leq k \leq n^2$. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$, $i \in I$, $j \in J$ это матрица общего вида над свободным кососимметричным полем, созданным ее элементами.

Пример. Для (2×2)-матрицы $A=(a_{ij}), i,j=1,2$ существует четыре квазидетерминанта

$$\begin{array}{ll}|A|^Q_{11}=a_{11}-a_{12}\cdot a^{-1}_{22}\cdot a_{21}, & |A|^Q_{12}=a_{12}-a_{11}\cdot a^{-1}_{21}\cdot a_{22},\\ |A|^Q_{21}=a_{21}-a_{22}\cdot a^{-1}_{12}\cdot a_{11}, & |A|^Q_{22}=a_{22}-a_{21}\cdot a^{-1}_{11}\cdot a_{12},\end{array}$$

и каждый из них определен, если соответствующий элемент a^{-1}_{ij} в правой части определен в R.

Пример. Для матрицы $A=(a_{ij}), i,j=1,2,3$ существует девять квазидетерминантов. Выпишем только первый из них

$$\begin{aligned}|A|^Q_{11} &= a_{11}-a_{12}(a_{22}-a_{23}a^{-1}_{33}a_{32})^{-1}a_{21}-a_{12}(a_{32}-a_{33}\cdot a^{-1}_{23}a_{22})^{-1}a_{31}-\\ &-a_{13}(a_{23}-a_{22}a^{-1}_{32}a_{33})^{-1}a_{21}-a_{13}(a_{33}-a_{32}\cdot a^{-1}_{22}a_{23})^{-1}a_{31},\end{aligned}$$

который определен в том случае если все обратные существуют в R.

Таким образом, если каждый элемент a_{ij} обратим, морфизм $V_j\to V_i$ в аддитивной категории, тогда квазидетерминант $|A|^Q_{pq}$ может быть рассмотрен как морфизм из объекта V_q в объект V_p, если матрица морфизмов A^{pq} обратима.

Квазидетерминант не является обобщением детерминанта над коммутативным кольцом, но представляет собой обощение отношения двух детерминантов. Поэтому, в общем случае квазидетерминанты нельзя рассматривать как полиномы, а только как рациональные функции. Более того, высота инверсии квазидетерминанта матрицы $n\times n$ равна $n-1$ [38].

Пример. Если все переменные a_{ij} коммутируют, тогда

$$|A|^Q_{pq}=(-1)^{p+q}\frac{\det A}{\det A^{pq}}.$$

Подобные выражения для квазидетерминантов могут быть даны для квантовых матриц, кватернионных матриц, суперматриц, матриц Капелли и матриц других классов [36].

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КВАЗИДЕТЕРМИНАНТОВ

Пусть $A=(a_{ij})$ — квадратная матрица, тогда имеют место следующие свойства:

1) Квазидетерминант $|A|^Q_{pq}$ не изменится при перестановки рядов и столбцов матрицы A если p-ая строка и q-ый столбец не изменятся.

2) Пусть матрица $B=(b_{ij})$ получена из матрицы A умножением i-ой строки на скаляр λ слева, т.е. $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ и $b_{kj}=a_{kj}$ если $k\neq i$. Тогда

$$|B|^Q_{kj}=\begin{cases}\lambda|A|^Q_{ij} & \text{если } k=i\\ |A|^Q_{kj} & \text{если } k\neq i \text{ и } \lambda \text{ обратимы .}\end{cases}$$

Пусть матрица $C=(c_{ij})$ получена из матрицы A умножением j-ого столбца на скаляр μ справа, т.е. $c_{ij}=a_{ij}\mu$ и $c_{il}=a_{il}$ для всех i и $l\neq i$. Тогда

$$|C|^Q_{i\ell}=\begin{cases}|A|^Q_{ij}\mu & \text{если } \ell=j\\ |A|^Q_{i\ell} & \text{если } \ell\neq j \text{ и } \mu \text{ обратимо.}\end{cases}$$

3) Пусть матрица B получена из матрицы A при сложении некоторого ряда A с ее k-ым рядом, умноженным на скаляр λ слева. Тогда

$$|A|^Q_{ij}=|B|^Q_{ij},\quad i=1,\dots k-1,k+1,\dots n,\ j=1,\dots,n.$$

Пусть матрица B получена из матрицы A при сложении некоторого столбца A с ее l-ым столбцом, умноженным на скаляр λ справа. Тогда

$$|A|^Q_{ij}=|C|^Q_{ij},\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,\ell-1,\ell+1,\dots n.$$

СВОЙСТВА КВАЗИДЕТЕРМИНАНТОВ

Квазидетерминанты и обратные матрицы. Если $A=(a_{ij})$ матрица общего вида и $B=(b_{ij})$ равна A^{-1}, тогда $b_{ji}=\left(|A|^Q_{ij}\right)^{-1}$ для всех i,j.

Для квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ обозначим $IA=A^{-1}$ обратную матрицу, и $HA=(a^{-1}_{ji})$ обратную Адамара. Очевидно, что если IA определена, тогда $I^2A=A$, и если HA определена, тогда $H^2A=A$.

Пусть $A^{-1} = (b_{ij})$, $b_{ij} = \left(|A|^Q_{ij}\right)^{-1}$. Эта формула может быть записана в следующем виде $HI(A) = (|A|^Q_{ij})$.

Гомологическое отношение. Отношение двух квазидетерминантов некоторой квадратной матрицы — это отношение двух рациональных функций меньшего порядка [36]. Это вытекает из следующих гомологических отношений:

a) Гомологическаие отношения строк:

$$-|A|^Q_{ij} \cdot |A^{i\ell}|^{Q-1}_{sj} = |A|^Q_{i\ell} \cdot |A^{ij}|^{Q-1}_{s\ell} \qquad \forall s \neq i$$

b) Гомологические отношения столбцов:

$$-|A^{kj}|^{Q-1}_{it} \cdot |A|^Q_{ij} = |A^{ij}|^{Q-1}_{kt} \cdot |A|^Q_{kj} \qquad \forall r \neq j$$

Наследственность. Пусть $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ есть разложение $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n$, на блочные матрицы. Пусть A_{11}- $(k \times k)$-матрица и пусть матрица A_{22} обратима, тогда

$$|A|^Q_{ij} = |A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1} \cdot A_{21}|^Q_{ij} \text{ для } i, j = 1.\ldots, k$$

Другими словами квазидетерминант $|A|^Q_{ij}$ матрицы $n \times n$ может быть вычислен в два шага: первый, рассмотреть квазидетерминант $|\tilde{A}|^Q_{11} = A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}$ для (2×2)-матрицы $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$; и второй — рассмотреть соответствующий квазидетерминант $(k \times k)$-матрицы $|\tilde{A}|^Q_{11}$.

В общем случае, пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ матрица и

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1s} \\ & & \\ A_{s1} & \ldots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

ее блочное разложение. Обозначим $\tilde{A} = (A_{ij}), i, j = 1, \ldots, s$, матрицу с элементами A_{ij}. Предположим, что

$$A_{pq} = \begin{pmatrix} a_{k\ell} & \ldots & a_{k,\ell+m} \\ & \ldots & \\ a_{k+m,\ell} & \ldots & a_{k+m,\ell+m} \end{pmatrix}.$$

квадратная матрица и что $|\tilde{A}|_{pq}$ определен, тогда имеет место равенство [36]

$$|A|^Q_{k'\ell'} = \left||\tilde{A}|^Q_{pq}\right|^Q_{k'\ell'} \text{ для } k' = k, \ldots, k+m, \;\; l' = l, \ldots, l+m$$

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Разложение на блочные матрицы следующее $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, тогда $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, и

$$|\tilde{A}|^Q_{12} = A_{12} - A_{11}A_{21}^{-1}A_{22} = \begin{pmatrix} a_{13} - \ldots & a_{14} - \ldots \\ a_{23} - \ldots & a_{24} - \ldots \end{pmatrix}$$

и

$$|A|^Q_{13} = \begin{vmatrix} a_{13} - \ldots & a_{14} - \ldots \\ a_{23} - \ldots & a_{24} - \ldots \end{vmatrix}^Q_{13}.$$

Квазидетерминант и тензорное произведение Кронекера. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{\alpha\beta})$ матрицы с элементами из кольца R. Обозначим $A \otimes B$ тензорное произведение Кронекера, и элементы матрицы $A \otimes B$ пронумеруем как $(ij, \alpha\beta)$. Если квазидетерминанты $|A|^Q_{ij}$ и $|B|^Q_{\alpha\beta}$ определены, тогда квазидетерминант $|A \otimes B|^Q_{ij,\alpha\beta}$ определен и

$$|A \otimes B|^Q_{ij,\alpha\beta} = |A|^Q_{ij}|B|^Q_{\alpha\beta}.$$

Отметим, что в коммутативном случае соответствующее тождество имеет следующий вид: если A есть $(n \times n)$-матрица и B есть $(m \times m)$-матрица над коммутативным кольцом R_{comm}, тогда $\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$.

Квазидетерминант и ранг матрицы. Пусть $A = (a_{ij})$ матрица над алгеброй с делением. Если квазидетерминант $|A|^Q_{ij}$ определен, тогда следующие утверждения эквивалентны: **i)** $|A|_{ij} = 0$, **ii)** i-ый ряд матрицы A является левой линейной комбинацией других рядов A; **iii)** j-ый столбец матрицы A является правой линейной комбинацией других столбцов A.

Пример. Пусть $i, j = 1, 2$ и $|A|_{11} = 0$. Это означает, что $a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21} = 0$. Из этого следует, что $a_{11} = \lambda a_{21}$, где $\lambda = a_{12}a_{22}^{-1}$. Тогда $a_{12} = (a_{12}a_{22}^{-1})a_{22}$, и первая строка A пропорциональна второй строке.

Определим r-квазиминор квадратной матрицы A как квазидетерминант $(r \times r)$-подматрицы A. Ранг A над кососимметричным полем больше или равен r, тогда и только тогда, когда наименьший из r-квазиминоров матрицы A определен и не равен нулю.

НЕКОММУТАТИВНЫЕ ДЕТЕРМИНАНТЫ

Некоммутативный детерминант как произведение квазиминоров. Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ — матрица над алгеброй с делением R такая, что все ее квадратные подматрицы обратимы. Для любых перестановок $I = (i_1, \ldots, i_n)$, $J = (j_1, \ldots, j_n)$ из $\{1, \ldots, n\}$ определим $A^{i_1 \ldots i_k, j_1 \ldots j_k}$ как подматрицу, которая получена из A удалением рядов с индексами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с индексами $j_1, \ldots, j_k$. Тогда положим [36]

$$D_{I,J}(A) = |A|^Q_{i_1 j_1} |A^{i_1 j_1}|^Q_{i_2 j_2} |A^{i_1 i_2, j_1 j_2}|^Q_{i_3 j_3} \ldots a_{i_n j_n}.$$

В коммутативном случае все $D_{I,J}(A)$ с точностью до знака равны детерминанту A. Если A — квантовая матрица, все $D_{I,J}(A)$ равны с точностью до скаляра детерминанту A. То же самое справедливо для некоторых других, хорошо известных, некоммутативных алгебр. Это дает возможность называть величину $D_{I,J}(A)$ как (I, J)-предетерминант матрицы A. С категорной точки зрения, выражения $D_{I,I'}$, когда $I' = (i_2, i_3, \ldots, i_n, i_1)$ чрезвычайно важны, обозначим $D_I = D_{I,I'}$, тогда существует $n!$ выражений D_I. Удобно ввести основной предетерминант $\Delta = D_{\{12\ldots n\},\{12\ldots n\}}$.

Используя гомологические отношения, можно сравнивать различные предетерминанты $D_{I,J}$. Например, если $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ и $I' = (i_2, i_1, \ldots, i_n)$, $J' = (j_2, j_1, \ldots, j_n)$ этого достаточно для сравнения $|A|^Q_{i_1 j_1}|A^{i_1 j_1}|^Q_{i_2 j_2}$ и $|A|^Q_{i_2 j_2}|A^{i_2 j_2}|^Q_{i_1 j_2}$. Гомологические отношения показывают, что эти выражения являются в определенном смысле "сопряженными"

$$|A|^Q_{i_2 j_2}|A^{i_2 j_2}|^Q_{i_1 j_1} = |A^{i_1 j_1}|^Q_{i_2 j_2}\left(|A^{i_2 j_1}|^Q_{i_1 j_2}\right)^{-1}|A|^Q_{i_1 j_1}\left(|A^{i_1 j_1}|^Q_{i_2 j_2}\right)^{-1}|A^{i_2 j_1}|^Q_{i_1 j_2}|A^{i_2 j_2}|^Q_{i_1 j_1}.$$

Пусть R — алгебра с делением, R^* полугруппа из элементов, обратимых в R и $\pi : R^* \to R^*/[R^*, R^*]$ — естественный гомоморфизм. Группа $R^*/[R^*, R^*]$ является абелевой. К этой группе присоедеиним нулевой элемент 0 с естественным умножением, и обозначим полученную полугруппу $\tilde{R}$. Для $\mu \in R$ и $\tilde{\mu} = \pi(\mu)$, если $\mu \neq 0$, и $\tilde{\mu} = 0$ если $\mu = 0$.

Детерминантом Дьедонне [25, 26, 27] называется гоморфизм

$$\det_D : M_n(R) \to \tilde{R}$$

такой что

i) $\det_D A' = \tilde{\mu} \det_D A$ для любой матрицы A', полученной из $A \in M_n(R)$ умножением одной строки A слева на μ;

ii) $\det_D A'' = \det_D A$ для любой матрицы A'', которая получена из A прибавлением одной строки к другой;

iii) детерминант единичной матрицы равен 1.

Для детерминанта Дьедонне имеет место выражение через предетерминант в виде [36]

$$\det_D A = \pi(\Delta(A)),$$

где $\pi(D_{I,J}) = p(I)\, p(J)\, \Delta$ и $p(I)$ — четность упорядочивания I.

Детерминант Дьедонне для кватернионов. Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ общая кватернионная матрица $a_{ij} \in \mathbb{H}$, тогда детерминант Дьедонне $\det_D$ отображает

$$\det_D : M_n(\mathbb{H}) \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

и $|D_{I,J}(A)|$, абсолютное значение $D_{I,J}(A)$, равно $D(A)$ для любых I, J.

Детерминант Мура. Кватернионная матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ эрмитова, если $a_{ji} = \overline{a}_{ji}$ для всех i, j. Из этого следует, что все диагональные элементы A — действительные числа и, что подматрицы A^{11}, $A^{12,12}, \ldots$ — эрмитовы.

Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, матрица с элементами из кольца. Пусть σ - перестановка из $\{1, \ldots, n\}$. Можно записать σ как произведение дизъюнктивных циклов таких, что каждый цикл начинается с наименьшего числа. Так как дизъюнктивные циклы коммутируют, можно записать

$$\sigma = (k_{11} \ldots k_{1j_1})(k_{21} \ldots k_{2j_2}) \ldots (k_{m1} \ldots k_{mj_m})$$

где для каждого i, имеем $k_{i1} < k_{ij}$ для всех $j > 1$, и $k_{11} > k_{21} \cdots > k_{m1}$, причем это выражение единственно. Пусть $p(\sigma)$ четность σ, тогда детерминант Мура $M(A)$ определяется как [24]

$$\det_M A = \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) a_{k_{11},k_{12}} \ldots a_{k_{1j_1},k_{11}} a_{k_{21},k_{22}} \ldots a_{k_{mj_m},k_{m1}}$$

Если A — эрмитова кватернионная матрица, то $\det_M A$ — действительное число. Можно показать, что для эрмитовой кватернионной матрицы A детерминанты $D_{I,I}(A)$ совпадают с точностью до знака. Если A эрмитова, тогда $\Delta(A)$ -произведение действительных чисел, следовательно $\Delta(A)$ действителен и $\Delta(A) = p(I)p(J)D_{I,J}(A)$, где $p(I)$ — четность I. Пусть A — эрмитова кватернонная матрица, тогда $\Delta(A) = \det_M A$.

Для общей кватернионной матрицы $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, определена кватернионная норма $\nu(A)$ следующим образом:

i) $\nu(A) = \nu(a)$, если A есть (1×1)-матрица (a);

ii) $\nu(A) = \nu(|A|^Q_{11})\nu(A^{11})$.

Из этого следует что $\nu(A) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. При этом $\nu(AB) = \nu(A)\nu(B)$ и $\nu(A) = \Delta(A)\Delta(A^*) = \Delta(AA^*)$, а поскольку величина AA^* эрмитова, то

$$\nu(A) = \det_M(AA^*),$$

где $\det_M$ — детерминант Мура. Поскольку норма $\nu(A)$ является полиномиальной функцией элементов a_{ij} и a^*_{ij}, то она определена для всех матриц.

Детерминант Стади. Вложение поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$ определяется образом мнимой единицы $\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Выберем следующие вложение $x + y\mathbf{i} \mapsto x + y\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, где $x, y \in \mathbb{R}$ и отождествим $\mathbb{C}$ с его образом в $\mathbb{H}$. Тогда любой кватернион a может быть представлен единственным образом как $\mathbf{a} = \alpha + \mathbf{i}\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Пусть $M(n, F)$ алгебра матриц порядка n над полем F. Определим гомоморфизм $\theta : \mathbb{H} \to M(2, \mathbb{C})$ как

$$\theta(a) = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix},$$

который может быть расширен до гомоморфизма алгебры матриц.

$$\theta_n : M(n, \mathbb{H}) \to M(2n, \mathbb{C}).$$

Пусть $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{H})$, set $\theta_n(A) = (\theta(a_{ij}))$. Определим детерминант $\det_S A$ кватернионной матрицы A порядка n как [23]

$$\det_S A = \det \theta_n(A),$$

где — det стандартный детерминант комплексной матрицы. Для кватернионной матрицы A имеем соотношение между детерминантами Мура и Стади

$$\det_S A = \det_M(AA^*).$$

Квантовый детерминант. Пусть $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n$ квантовая матрица над полем F , и $q \in F$ такое, что

$$\begin{aligned} a_{ik}a_{il} &= q^{-1}a_{il}a_{ik} \quad \text{для} \quad k < l, \;\; a_{ik}a_{jk} = q^{-1}a_{jk}a_{ik} \quad \text{для} \quad i < j, \\ a_{il}a_{jk} &= a_{jk}a_{il} \quad \text{для} \quad i < j, \quad k < l, \\ a_{ik}a_{jl} - a_{jl}a_{ik} &= (q^{-1} - q)a_{il}a_{jk} \quad \text{для} \;\; i < j, \quad k < l. \end{aligned}$$

Квантовый детерминант $\det_q A$ по определению равен [30]

$$\det_q A = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{-l(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} \ldots a_{1\sigma(n)},$$

где $l(\sigma)$ число инверсий в σ. Если A — квантовая матрица, то любая квадратная подматрица A также является квантовой матрицей с некоторым скаляром q

$$\begin{aligned} \det{}_q A &= (-q)^{i-j}|A|_{ij} \cdot \det{}_q A^{ij} = (-q)^{i-j}\det{}_q A^{ij} \cdot |A|_{ij}. \\ \det{}_q A &= |A|_{11}|A^{11}|_{22} \ldots a_{nn}, \end{aligned}$$

и все множители в правой части коммутируют.

Детерминант Капелли. Пусть $X = (x_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ с формальными коммутативными элементами и X^T транспонированная матрица. Пусть $D = (\partial_{ij})$, $\partial_{ij} = \partial/\partial_{ij}$, есть матрица дифференциальных операторов, тогда $X^T D = (f_{ij})$, где $f_{ij} = \sum_k x_{ki}\partial/\partial_{kj}$.

Пусть W диагональная матрица, $W = \operatorname{diag}(0, 1, 2, \ldots, n)$. По определению детерминант Капелли выражения равен [31]

$$\det_C \left(X^T D - W\right) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{l(\sigma)} f_{\sigma(1)1}(f_{\sigma(2)2} - \delta_{\sigma(2)2} \ldots (f_{\sigma(n)n} - (n-1)\delta_{\sigma(n)n}).$$

Положим $Z = X^T D - I_n$, тогда детерминант Капелли может быть представлен как произведение квазидетерминантов

$$|Z|^Q_{11}|Z^{11}|^Q_{22} \ldots z_{nn} = \det X \det D,$$

где все множители в левой части коммутируют.

Березиниан. Пусть $p(k)$ четность числа k, т.е. $p(k) = 0$ если k — четное и $p(k) = 1$ если k — нечетное. Коммутативное суперкольцо над R^0 - это кольцо $R = R^0 \oplus R^1$, такое что

i) $a_i a_j \in R^{p(i+j)}$ для любого $a_m \in R^m$, $m = 0, 1$,

ii) $ab = ba$ для любого $a \in R^0$, $b \in R$, и $cd = -dc$ для любого $c, d \in R^1$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ есть $(m + n) \times (m + n)$-блок-матрица над суперкольцом $R = R^0 \oplus R^1$, и X есть $(m \times m)$-матрица над R^0, T $(n \times n)$-матрица над R^0, и Y, Z — матрицы над R^1. Если T обратимая матрица, тогда $X - YT^{-1}Z$ тоже обратимая матрица над коммутативным кольцом R^0. Супердетерминант (или березиниан A [39]) определяется следующей формулой [28, 29]

$$\operatorname{Ber} A = \det(X - YT^{-1}Z) \cdot \det T^{-1},$$

и это выражение принадлежит R^0.

Пусть R^0 поле. $J_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, $k \le m + n$ и $A^k = A^{J_k, J_k}$. Тогда $\operatorname{Ber} A$ может быть представлен [36] как произведение элементов из R^0

$$\operatorname{Ber} A = |A|^Q_{11} \cdot |A^{(1)}|^Q_{22} \cdot \cdots \cdot |A^{(m-1)}|^Q_{mm} \cdot \left(|A^{(m)}|^Q_{m+1,m+1}\right)^{-1} \cdot \cdots \cdot \left(|A^{(m+n-1)}|^Q_{m+n,m+n}\right)^{-1}.$$

Детерминант Картьер-Фоата. Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ матрица такая, что элементы a_{ij} и a_{kl} коммутируют, когда $i \neq k$. В этом случае детерминант Картьер-Фоата определяется как [32]

$$\det{}_{CF} A = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{l(\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

причем порядок множителей в одночлене $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$ не имеет значения. Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ матрица такая, что a_{ij} и a_{kl} коммутируют при $i \neq k$, тогда

$$|A|^Q_{pq} = (-1)^{p+q} \det{}_{CF}(A^{pq})^{-1} \cdot \det{}_{CF} A$$

если все выражения в этой формуле определены.

КВАЗИДЕТЕРМИНАНТЫ НЕОБРАТИМЫХ МАТРИЦ

Определим квазидетерминант для необратимых матриц. Если матрица A необратима, то матрица A^+, удовлетворяющая равенствам

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+$$

называется обобщенной обратной для матрицы A [40, 41, 42, 43]. В обратимом случае $A^+ = A^{-1}$.

Если все квазидетерминанты $\left|A^{ij}\right|^Q_{pq}$ для $p \in I \setminus \{i\}$, $q \in J \setminus \{j\}$ определены и имеют обощенные обратные $\left|A^{ij}\right|^{Q+}_{pq}$, определяемые соотношениями (здесь нет суммирования)

$$\begin{aligned} \left|A^{ij}\right|^{Q+}_{pq} &= \left|A^{ij}\right|^{Q+}_{pq} \left|A^{ij}\right|^{Q}_{pq} \left|A^{ij}\right|^{Q+}_{pq}, \\ \left|A^{ij}\right|^{Q}_{pq} &= \left|A^{ij}\right|^{Q}_{pq} \left|A^{ij}\right|^{Q+}_{pq} \left|A^{ij}\right|^{Q}_{pq}, \end{aligned}$$

то обобщенный квазидетерминант можно определить формулой

$$|A|^Q_{ij} = a_{ij} - \sum_{p,q} a_{iq} \left|A^{ij}\right|^{Q+}_{pq} a_{pj}$$

Таким образом определенный квазидетерминант обладает следующими свойствами. Пусть $A = (a_{ij})$ квадратная матрица и пусть матрица $B = (b_{ij})$ получена из матрицы A умножением i-ого ряда на скаляр λ слева, т.е. $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ и $b_{kj} = a_{kj}$ если $k \neq i$. Тогда

$$|B|_{kj} = \lambda |A|_{ij}, \text{ если } k = i.$$

Пусть матрица $D = (d_{ij})$ получена из матрицы A умножением j-ого столбца на скаляр μ справа, т.е. $d_{ij} = a_{ij}\mu$ и $d_{il} = a_{il}$ для всех i и $l \neq i$. Тогда

$$|D|_{i\ell} = |A|_{ij}\mu, \text{ если } \ell = j.$$

Пусть λ^+ есть обощенная обратная для λ, т.е.

$$\lambda^+ = \lambda^+\lambda\lambda^+, \quad \lambda = \lambda\lambda^+\lambda. \tag{1}$$

Тогда матрица $C = (C_{ij})$ получена из матрицы A умножением i-ого ряда на скаляр $\lambda^+\lambda$, т.е. $c_{ij} = \lambda^+\lambda a_{ij}$ и $c_{nj} = a_{nj}$, если $n \neq i$, то

$$|C|_{nj} = \begin{cases} \lambda^+\lambda|A|_{ij} & \text{если } n = i, \\ |B|_{nj} & \text{если } n \neq i. \end{cases}$$

Если домножить левую и правую часть равенства слева на λ, то из соотношений (1) получим $\lambda|C|_{ij} = \lambda|A|_{ij}$ (отметим, что теперь у нас нет сокращения).

Пусть матрица $F = (f_{ij})$ получена из матрицы A умножением j-ого столбца на скаляр $\mu\mu^+$ справа (μ^+ есть обобщенное обратное для μ), т.е. $d_{ij} = a_{ij}\mu\mu^+$ и $d_{ir} = a_{ir}$ для всех i и $r \neq j$. Тогда

$$|F|_{ir} = \begin{cases} |A|_{ij}\mu\mu^+ & \text{если } r = j \\ |D|_{ir} & \text{если } r \neq j. \end{cases}$$

Если домножить левую и правую часть равенства справа на μ получим $|F|_{ij}\mu = |A|_{ij}\mu$ при $r = j$ (нет сокращения).

Таким образом, в работе проанализированы некоммутативные детерминанты и квазидетерминанты, играющие важную роль в теории представлений современных суперсимметричных теорий и квантовых групп. Полученные результаты могут быть использованы при построении суперсимметричных и некоммутативных теорий поля, и новых моделей элементарных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллов А. А. *Элементы теории представлений*. - М.: *Наука*, 1978. - 343 с.
2. Хэмфри Д. *Линейные алгебраические группы*. - М.: *Наука*, 1980. - 399 с.
3. Barut A. O., Raczka R. *Theory of Group Representations and Applications*. - Singapore: *World Sci.*, 1986.
4. Волков Д. В., Акулов В. П. // *Об универсальном взаимодействии нейтрино*. Письма в ЖЭТФ. - 1972. - Т. **16**. - № 11. - С. 621–624.
5. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. // *Расширение генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности*. Письма в ЖЭТФ. - 1971. - Т. **13**. - № 8. - С. 452–455.
6. Весс Ю., Беггер Д. *Суперсимметрия и супергравитация*. - М.: *Мир*, 1986. - 178 с.
7. Уэст П. *Введение в суперсимметрию и супергравитацию*. - М.: *Мир*, 1989. - 332 с.
8. Волков Д. В. // *Тенденции в развитии суперсимметричных теорий*. Укр. физ. журнал. - 1987. - Т. **32**. - № 7. - С. 1782–1801.
9. Drinfeld V. G. // *Quantum groups*. Proceedings of the ICM, Berkeley. - Phode Island. *AMS*, 1987. - P. 798–820.
10. Kassel C. *Quantum Groups*. - New York: *Springer-Verlag*, 1995. - 531 p.
11. Shnider S., Sternberg S. *Quantum Groups*. - Boston: *International Press*, 1993. - 371 p.
12. Демидов Е. Е. *Квантовые группы*. - М.: *Факториал*, 1998. - 146 с.
13. Березин Ф. А., Кац Г. И. // *Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами*. Мат. сборник. - 1970. - Т. **82**. - № 3. - С. 343–359.
14. Березин Ф. А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*. - М.: *Изд-во МГУ*, 1983. - 208 с.
15. Schirmacher A., Wess J., Zumino B. // *The two parameter deformation of $GL(2)$ its differential calculus, and Lie algebra*. Z. Phys. - 1991. - V. **49**. - P. 317–321.

16. Wess J., Zumino B. // *Covariant differential calculus on the quantum hyperplane*. Nucl. Phys. (Proc. Suppl.). - 1990. - V. **B18**. - P. 302–312.

17. Дуплий С. А. *Полусупермногообразия и полугруппы*. - Харьков: *Крок*, 2000. - 220 с.

18. Duplij S. // *Semigroups of supermatrices and one-parameter idempotent superoperators*. Journal of Kharkov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields. - 2001. - V. **510**. - № 1(13). - P. 11–23.

19. Duplij S. // *On supermatrix operator semigroups*. Quasigroups and Related Systems. - 2000. - V. **7**. - № 1. - P. 71–98.

20. Дуплий С. А., Котульская О. И. // *Суперматричные структуры и обобщенные обратные*. Вестник ХНУ, сер. “Ядра, частицы, поля”. - 2002. - Т. **548**. - № 1(17). - С. 3–14.

21. Duplij S. // *On supermatrix idempotent operator semigroups*. Linear Algebra Appl. - 2003. - V. **360**. - P. 59–81.

22. Cayley A. // *On certain results relating to quaternions*. Phil. Mag. - 1845. - V. **26**. - P. 141–145.

23. Study E. // *Zur theorie der lineare gleichungen*. Acta Math. - 1920. - V. **42**. - P. 1–61.

24. Moore E. H. // *On the determinant of an Hermitian matrix of quaternionic elements*. Bull. Amer. Math. Soc. - 1922. - V. **28**. - P. 161–162.

25. Diedonne J. // *Les determinantes sur un corps non-commutatif*. Bull. Soc. Math. France. - 1943. - V. **71**. - P. 27–45.

26. Artin E. *Geometric Algebra*. - Dordrecht: *Reidel*, 1987.

27. Дьедонне Ж. *Геометрия классических групп*. - М.: *Мир*, 1974. - 204 с.

28. Березин Ф. А., Лейтес Д. А. // *Супермногообразия*. ДАН СССР. - 1975. - Т. **224**. - № 3. - С. 505–508.

29. Пахомов В. Ф. // *Автоморфизмы тензорного произведения абелевой и грассмановой алгебр*. Мат. заметки. - 1974. - Т. **16**. - № 1. - С. 65–74.

30. Manin Y. // *Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup*. Comm. Math. Phys. - 1989. - V. **123**. - P. 123–135.

31. Вейль Г. *Классические группы, их инварианты и представления*. - М.: *ИЛ*, 1947. - 408 с.

32. Cartier P., Foata D. // *Problemes combinatoires de commutation et rearrangements*. Lecture Notes Math. - 1969. - V. **85**.

33. Гельфанд И. М., Ретах В. С. // *Детерминанты матриц над антикоммутативными кольцами*. Функц. анализ и его прил. - 1991. - Т. **25**. - № 2. - С. 91–102.

34. Гельфанд И. М., Ретах В. С. // *Теория некоммутативных детерминантов и характеристических функций графов*. Функц. анализ и его прил. - 1993. - Т. **26**. - № 4. - С. 231–246.

35. Cohn P. M. // *Skew-field constructions*. London Math. Soc. Lecture Note Series. - 1977. - V. **27**.

36. Gelfand I., Gelfand S., Retakh V., Wilson R. // *Quasideterminants*. - Piscataway, 2002. - 39 p. (*Preprint* / *Rutgers Univ.*).

37. Etingof P., Retakh V. // *Quantum determinants and quasideterminants*. Asian J. Math. - 1999. - V. **3**. - № 2. - P. 345–352.

38. Reutenauer C. // *Inversion height in free fields*. Selecta Math. - 1996. - V. **2**. - № 1.

39. Лейтес Д. А. // *Определенный аналог детерминанта*. Успехи мат. наук. - 1975. - Т. **30**. - № 3. - С. 156.

40. Hartwig R. R. // *Block generalized inverses*. Arch. Rat. Mech. Anal. - 1976. - V. **61**. - № 1. - P. 197–251.

41. Ben-Israel A., Greville T. N. E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. - New York: *Wiley*, 1974.

42. Hawkins J. B., , Ben-Israel A. // *On generalized matrix functions*. Linear and Multilinear Algebra. - 1973. - V. **1**. - № 2. - P. 163–171.

43. Tian Y. // *The Moore-Penrose inverses of $m \times n$ block matrices and their applications*. Linear Algebra Appl. - 1998. - V. **283**. - № 1. - P. 35–60.

QUASIDETERMINANTS, NONCOMMUTATIVE DETERMINANTS AND NONINVERTIBLE SUPERMATRIX STRUCTURES

S.A. Duplij [1], **O.I. Kotulska** [2]

[1] *Department of Physics and Technology, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine*

[2] *Department of Mathematics and Mechanics, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine*

The general theory of quasideterminants is presented. The notion of quasideterminant is defined for matrices over free skew fields, its properties are described. The noncommutative determinants are considered as product of quasiminors. Examples of most well-known noncommutative determinants are given. Generalization of quasideterminant on noninvertible case is introduced.

KEY WORDS: determinant, skew field quasideterminant, noninvertibility, semigroup, generalized inverse, regularity